1	2	3	4		Calif.

Se le agradece a Emanuel Ferreyra por haber tipeado la resolución.

Análisis Funcional - 1er Cuatrimestre 2018
2do Parcial 6/07/2018

El examen es a carpeta abierta. Puede utilizar las clases teóricas, las clases prácticas, las guías prácticas y ejercicios resueltos que posea. Si utiliza un resultado de la guía, que no vimos en clase, consulte o incluya una demostración.

Justifique todas sus respuestas

Ejercicio 1. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador unitario y $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ la proyección ortogonal en $\ker(id - U)$ (es decir, los puntos fijos de U).

- Probar que $\ker P = \overline{\mathrm{Im}(id - U)}$.
- Probar que para todo $x \in \mathcal{H}$ vale

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} U^n x = Px$$

Demostración. Comenzamos con la primera afirmación. Dado que U es unitario, notemos que

$$x \in \ker(id - U) \Leftrightarrow Ux = x \Leftrightarrow U^*Ux = U^*x \Leftrightarrow x = U^*x \Leftrightarrow x \in \ker(id - U^*),$$

por lo que $\ker(id - U^*) = \ker(id - U)$. Recordemos ahora que para cualquier operador T se tiene la igualdad $\ker T = \mathrm{Im}(T^*)^\perp$. Entonces como $P = P^*$ (porque P es proyección ortogonal) se tiene que

$$\ker P = \mathrm{Im} P^\perp = \ker(id - U)^\perp = \ker(id - U^*)^\perp = \mathrm{Im}(id - U)^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Im}(id - U)}$$

como queríamos.
Veamos ahora la segunda afirmación. Supongamos primero que $x \in \ker P$. Entonces, por definición, se tiene que $Px = 0$.
Entonces, debemos probar que $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} U^n x = 0$.
Debido a lo que acabamos de ver, podemos afirmar que existe una sucesión $z_m \in \mathcal{H}$ tal que

$$x = \lim_{m\to\infty} (id - U)z_m = \lim_{m\to\infty} z_m - Uz_m.$$

Notemos $y_m = z_n - Uz_m$. De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} U^n(y_m) \right\| &= \left\| \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} U^n z_m - U^{n+1} z_m \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{k} (z_m - U^k z_m) \right\| \\
&\leq \frac{1}{k} \|z_n\| + \|U^k z_m\| \\
&= \frac{1}{k} \|z_n\| + \|z_m\| \xrightarrow{k\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Aquí hemos usado que $\|Uz\| = \|z\|$ dado que U es unitario.
Entonces, para x tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} U^n(x) \right\| &\leq \left\| \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} U^n(x - y_m) \right\| + \left\| \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} U^n(y_m) \right\| \\
&\leq \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \|U^n(x - y_m)\| + \left\| \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} U^n y_m \right\| \\
&\leq \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \|U^n\| \|(x - y_m)\| + \left\| \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} U^n y_m \right\| \\
&\leq \underbrace{\|x - y_m\|}_{\xrightarrow{m\to\infty} 0} + \underbrace{\left\| \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} U^n y_m \right\|}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} U^n x \to 0 = Px$.
Consideremos ahora el caso $x \in \mathrm{Im}P$. Dado que x está en la imagen de P, tenemos que $Px = x$. Por otro lado, debido a la definición de P, tenemos que $x \in \ker(id - U)$, es decir que $Ux = x$. Entonces

$$\frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} U^n x = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} x = x = Px,$$

y por lo tanto también tenemos la igualdad deseada en este caso.
Finalmente, si $x \in \mathcal{H}$ cualquiera, como $\mathcal{H} = \ker P \oplus \mathrm{Im}P$ porque P es una proyección ortogonal podemos escribir a $x = x_1 + x_2$ en el que x_1 pertenece a $\ker P$ y x_2 pertenece a $\mathrm{Im}P$. Entonces usando los dos casos anteriores tenemos que

$$\frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} U^n x = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} U^n(x_1) + \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} U^n(x_2) \to x_2 = Px.$$

□

Ejercicio 2. Sean E un espacio de Banach y $A, B \in \mathcal{L}(E)$ tal que $A - B$ es un operador compacto. Probar que $\sigma(A) \setminus \sigma_p(A) \subseteq \sigma(B)$. Es decir, sus espectros difieren en a lo sumo sus autovalores.
Sugerencia: Probar que si U es un operador inversible y K es un operador compacto entonces $U - K$ es un operador de Fredholm de índice 0. Para ésto puede asumir probado el caso en que $U = id$.

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$. Queremos ver que $\lambda \in \sigma(B)$. Supongamos que no; entonces debe ser que $B - \lambda id$ es inversible. Observando que $A - \lambda id = (A - B) + (B - \lambda id)$, tenemos que $A - \lambda id$ se escribe como suma de un compacto más un inversible; usando la sugerencia $A - \lambda id$ es un operador de Fredholm de índice 0. En particular $A - \lambda id$ es inyectivo si y sólo si es sobreyectivo. Como λ no es autovalor de A, tenemos que $A - \lambda id$ inyectivo, entonces también es sobreyectivo y por lo tanto inversible, pero esto es absurdo ya que λ estaba en el espectro de A. Luego, debe ser que $\lambda \in \sigma(B)$.
Demostremos la sugerencia. Sean U inversible y K compacto. Notemos que $U^* \in \mathcal{L}(E^*)$ también es inversible y $K^* \in \mathcal{L}(E^*)$ es compacto. Entonces tenemos las igualdades

$$\ker(U - K) = \ker(U(id - U^{-1}K)) = \ker(id - U^{-1}K)$$

$$\ker(U^* - K^*) = \ker(U^*(id - (U^*)^{-1}K^*)) = \ker(id - (U^*)^{-1}K^*)$$

Como $U^{-1}K$ y $(U^*)^{-1}K^*$ son compactos (porque los compactos son un ideal bilátero de $\mathcal{L}(E)$) tenemos que $id - U^{-1}K$ es un operador de Fredholm y por lo tanto $\ker(id - U^{-1}K)$ y $\ker(id -$

$(U^*)^{-1}K^*)$ son finitos. De la misma manera es fácil ver que U^{-1} provee de un isomorfismo entre $\mathrm{Im}(U-K)$ y $\mathrm{Im}(id-U^{-1}K)$, dado que E es Banach, uno es cerrado si y sólo si el otro lo es. En particular obtenemos que $U-K$ es Fredholm de índice igual que $id-U^{-1}K$ ya que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(U-K) &= \dim\ker(U-K) - \dim\ker(U^*-K^*)\\ &= \dim\ker(id-U^{-1}K) - \dim\ker(id-(U^*)^{-1}K^*)\\ &= \mathrm{Ind}(id-U^{-1}K) = 0\end{aligned}$$

□

Ejercicio 3. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert.

- Probar que si, $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ con B compacto tal que $\|Ax\| \leq \|Bx\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$ entonces A es compacto.
- Probar que si, $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ con T compactos tal que $0 \leq S \leq T$ entonces S es compacto.

Demostración. Veamos la primera afirmación. Queremos ver que $\overline{A(B_{\mathcal{H}})}$ es compacto. Sea $(A(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $A(B_{\mathcal{H}})$. Consideremos $(B(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B(B_{\mathcal{H}})}$. Como B es compacto, existe subsucesión $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $B(x_{n_j})$ converge. Entonces

$$\|A(x_{n_j}) - A(x_{n_k})\| = \|A(x_{n_j} - x_{n_k})\| \leq \|B(x_{n_j} - x_{n_k})\|.$$

Como Bx_{n_j} es de Cauchy, lo anterior muestra que la sucesión $(A(x_{n_j}))$ también. Esto concluye que A resulta compacto.
Veamos ahora la segunda afirmación. Como S y T son positivos, tienen raíz cuadrada positiva. Teniendo esto en cuenta, como $0 \leq S \leq T$, se tiene que

$$0 \leq \langle (T-S)x, x\rangle \Leftrightarrow \langle Sx, x\rangle \leq \langle Tx, x\rangle \Leftrightarrow \langle \sqrt{S}x, \sqrt{S}x\rangle \leq \langle \sqrt{T}x, \sqrt{T}x\rangle$$

Esto implica que $\|\sqrt{S}x\| \leq \|\sqrt{T}x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Como T es compacto, $\sqrt{T}$ también es compacto; por lo visto en la primera afirmación, obtenemos que $\sqrt{S}$ es compacto y por lo tanto S también. □

Ejercicio 4. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador normal y $f \in C(\sigma(T))$ una función derivable en un abierto que contiene a $\sigma(T)$ (Es decir, f es holomorfa en $\sigma(T)$). Probar que $f(\sigma_p(T)) \subseteq \sigma_p(f(T))$.

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\mu \in \sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ y $f(\mu) = \lambda$, como f es holomorfa en el espectro, $f - \lambda$ es holomorfa en un μ y podemos escribir $f(z) - \lambda = h(z)(z-\mu)$ con h holomorfa.
La función h puede definirse como

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-\lambda}{z-\mu} & \text{si } z \neq \mu \\ f'(\mu) & \text{si } z = \mu. \end{cases}$$

Usando cálculo funcional continuo, obtenemos que $f(T) - \lambda id = h(T)(T - \mu id)$. Dado que $\mu \in \sigma_p(T)$, existe un $x \neq 0$ tal que $(T - \mu id)x = 0$. Luego

$$(f(T) - \lambda)x = h(T)(T - \lambda I)x = 0$$

concluyendo que x es autovector de $f(T)$ de autovalor λ, por lo que $\lambda \in \sigma_p(f(T))$. □